第一章 二次函數

重點內容　1-1 二次函數及其圖形

(一)二次函數：

A、函數的定義：

(1)在兩變數 x、y 的關係中、若給定一個變數 x 的值，恰好有一個 y 值與 x 值相對應，則稱 y 是 x 的**函數**，且 x 為**自變數**，y 為**應變數**。

(2)設 a、b 為常數，則 $y=ax+b$ 稱為線型函數。

甲、線型函數的圖形必為一條**直線**。

乙、若 a＝0 時，此函數稱為**常數函數**，圖形為一條**水平直線**。

例：y＝3，y＝$-\dfrac{5}{2}$，y＝－0.05 為**常數函數**。

丙、若 a≠0 時，此函數稱為**一次函數**，圖形為一條**斜直線**。

例：y＝3x＋4，y＝$\dfrac{3}{2}x-\dfrac{2}{3}$，y＝－6x＋3 為**一次函數**。

(3)若 $y=ax^2+bx+c$，其中 a、b、c 皆為常數，且 a≠0，則：

甲、自變數 x 的最高次數為二次，我們稱 $y=ax^2+bx+c$ 為**二次函數**。

乙、二次函數的圖形為一條平滑的曲線(**拋物線**)。

例：$y=x^2+3x+2$，$y=-x^2-2x-3$，$y=\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{2}{3}x+\dfrac{3}{2}$ 皆為**二次函數**。

丙、將 $x=k$ 代入，可得到 $y=ak^2+bk+c$，此時所得的結果，稱為此二次函數在 $x=k$ 時的**函數值**。

丁、當 y 是 x 的函數值時，我們常以符號 $y=f(x)$ 來表示它們之間的關係，且用 $f(k)$ 代表 $x=k$ 時所對應的函數值。

例：已知 $y=2x^2+2x-4$，則：

(1) 當 x＝0 時，得 y＝2(0)^2＋2(0)－4＝－4，則 y＝－4 為 x＝0 的函數值，
也可以表示成 $f(0)=-4$。

(2) 當 x＝1 時，得 y＝2(1)^2＋2(1)－4＝0，則 y＝0 為 x＝1 的函數值，
也可以表示成 $f(1)=0$。

(3) 當 x＝－2 時，得 y＝2(－2)^2＋2(－2)－4＝0，則 y＝0 為 x＝－2 的函數值，
也可以表示成 $f(-2)=0$。

B、二次函數圖形的特徵：

(1)二次函數的圖形為平滑的**拋物線**。

(2)通常在描繪二次函數的圖形時，至少要先確定 5 個點：

甲、圖形的**最高點**或**最低點**，及通過該點的垂直線為**對稱軸**。

註：二次函數圖形的最高點或最低點皆稱為圖形的**頂點**。

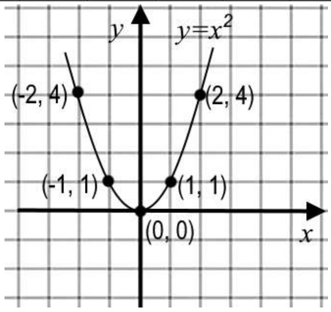
乙、對稱軸的左右各取**兩組對稱點**。

丙、將各點以平滑曲線連接起來即可。

C、圖形的繪製：

(1) $y=x^2$：

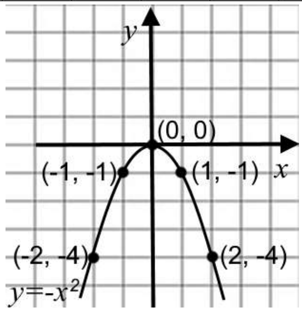
x	-2	-1	0	1	2
y	4	1	0	1	4



(1)圖形為開口向上的拋物線
(2)圖形有最低點(0, 0)
(3)圖形的對稱軸為 y＝0

(2) $y=-x^2$：

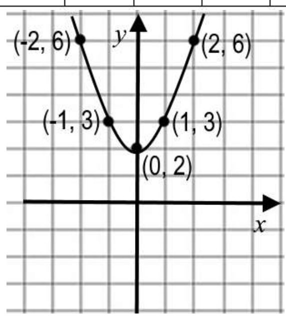
x	-2	-1	0	1	2
y	-4	-1	0	-1	-4



(1)圖形為開口向下的拋物線
(2)圖形有最高點(0, 0)
(3)圖形的對稱軸為 y＝0

(3) $y=x^2+2$：

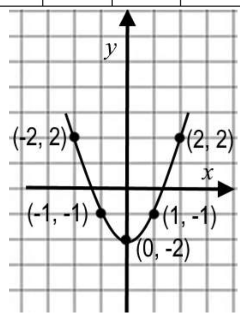
x	-2	-1	0	1	2
y	6	3	2	3	6



(1)圖形為開口向上的拋物線
(2)圖形有最低點(0, 2)
(3)圖形的對稱軸為 y＝0
(4)圖形為 y＝x² 向上平移 2 格

(4) $y=x^2-2$：

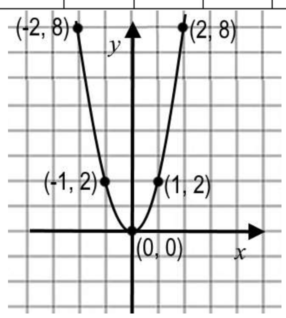
x	-2	-1	0	1	2
y	2	-1	-2	-1	2



(1)圖形為開口向上的拋物線
(2)圖形有最低點(0, 0)
(3)圖形的對稱軸為 y＝0
(4)圖形為 y＝x² 向下平移 2 格

(5) $y=2x^2$：

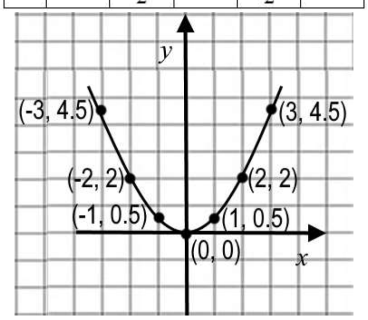
x	-2	-1	0	1	2
y	8	2	0	2	8



(1)圖形為開口向上的拋物線
(2)圖形有最低點(0, 0)
(3)圖形的對稱軸為 y＝0
(4) $|a|$ 值愈大，則圖形開口愈窄。

(6) $y=\frac{1}{2}x^2$：

x	-2	-1	0	1	2
y	2	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	2



(1)圖形為開口向上的拋物線
(2)圖形有最低點(0, 0)
(3)圖形的對稱軸為 y＝0
(4) $|a|$ 值愈小，則圖形開口愈大。

D、二次函數 $y=ax^2+k$ 有關係數的討論：

(1)a＞0：

甲、圖形會有一個最低點。

乙、x 值愈大，則 y 愈大，圖形向上延伸不會在上方相交，
此時圖形的開口向上。

(2)a＜0：

甲、圖形會有一個最高點。

乙、x 值愈大，則 y 愈小，圖形向下延伸不會在下方相交，
此時圖形的開口向下。

(3) $|a|$ 愈大，則拋物線愈狹長，開口愈窄；反之，$|a|$ 愈小，則拋物線愈肥胖，開口愈寬。

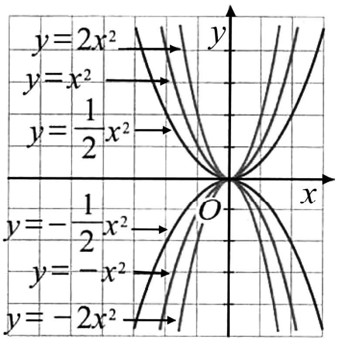
(4)當 x＝0 時，$y=k$，則(0, k) 為圖形的頂點，此時 x＝0 為圖形的對稱軸。

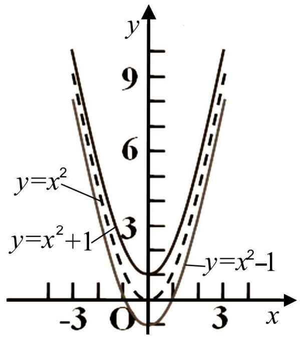
例：$y=4x^2$、$y=4x^2+5$(開口向上)、$y=-4x^2$、$y=-4x^2-3$ (開口向下)，4 個拋物線圖形的開口大小相等，圖形的對稱軸皆為 x＝0(y 軸)。

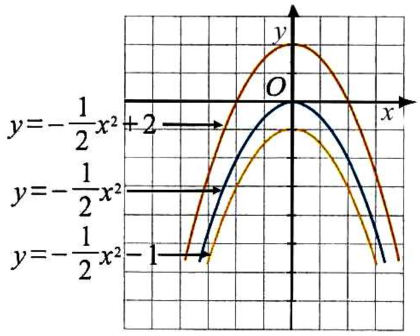
例：$y=4x^2$ 的頂點為(0, 0)、$y=4x^2+5$ 的頂點為(0, 5)、$y=-4x^2$ 的頂點為(0, 0)、$y=-4x^2-3$ 的頂點為(0, −3)。

例：甲：$y=6x^2$、乙：$y=4x^2+5$、丙：$y=-4x^2$、丁：$y=-2x^2-3$，戊：$y=-0.2x^2-3$
則圖形的開口大小：戊＞丁＞乙＝丙＞甲。

例：甲：$y=2x^2$、乙：$y=-2x^2$、丙：$y=2x^2+5$、丁：$y=-2x^2+5$，其中
甲和乙有共同的頂點(0, 0)，開口方向相反，但圖形上下對稱，可以疊合。
丙和丁有共同的頂點(0, 5)，開口方向相反，但圖形上下對稱，可以疊合。
圖形丙為圖形甲向上平移 5 個單位長；圖形丁為圖形乙向上平移 5 個單位長。

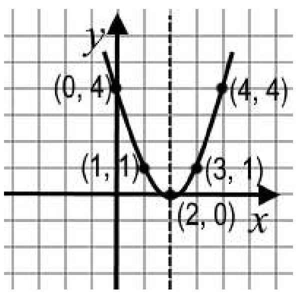




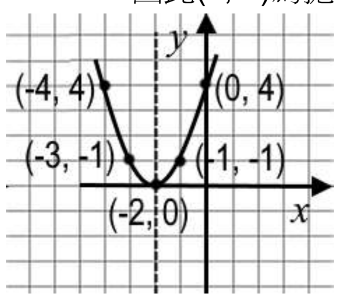


E、$y=a(x-h)^2+k$ 的圖形：

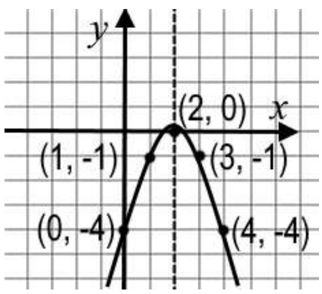
(1)令 $X=x-h$，則當 x＝h 時，X＝0，因此(h, 0)為拋物線的頂點，$x=h$ 為對稱軸。



$y=(x-2)^2$；



$y=(x+2)^2$；



$y=-(x-2)^2$

(2)當 a＞0 時，拋物線的開口向上；當 a＜0 時，拋物線的開口向下。

(3) $|a|$ 愈大，則拋物線愈狹長，開口愈窄；反之，$|a|$ 愈小，則拋物線愈肥胖，開口愈寬。

(4)若 k＞0，則拋物線圖形向上平移 k 單位長；若 k＜0，則拋物線圖形向下平移 k 單位長。

(二)配方法求二次函數：

A、 $y=ax^2+bx+c$的配方：

(1) $y=ax^2+bx+c=a(x^2+\frac{b}{a}x)+c=a(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2})+c-\frac{b^2}{4a}=a(x+\frac{b}{2a})^2+\frac{4ac}{4a}-\frac{b^2}{4a}$

$=a(x+\frac{b}{2a})^2-\frac{b^2-4ac}{4a}$

➔ 二次函數的頂點為$(-\frac{b}{2a},-\frac{b^2-4ac}{4a})$，對稱軸為 $x=-\frac{b}{2a}$

例：$x^2+\frac{3}{2}x+1=(x^2+\frac{3}{2}x)+1=(x+\frac{3}{4})^2-\frac{9}{16}+1=(x+\frac{3}{4})^2+\frac{7}{16}$

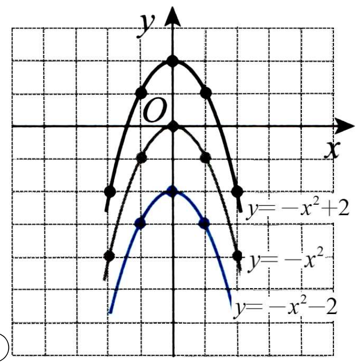
➔ 二次函數的頂點為$(-\frac{3}{4},\frac{7}{16})$，對稱軸為 $x=-\frac{3}{4}$

➔ 當 $x=-\frac{3}{4}$時，二次函數有極小值，為開口向上的拋物線。

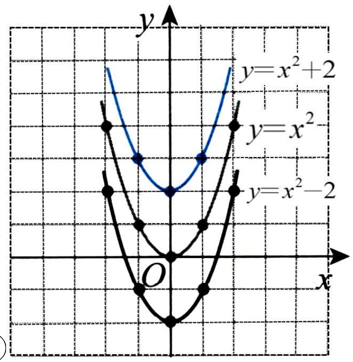
例：$-3x^2-\frac{3}{2}x+1=-3(x^2+\frac{1}{2}x)+1=-3(x+\frac{1}{4})^2-\frac{3}{16}+1=-3(x+\frac{1}{4})^2+\frac{13}{16}$

➔ 二次函數的頂點為$(-\frac{1}{4},\frac{13}{16})$，對稱軸為 $x=-\frac{1}{4}$

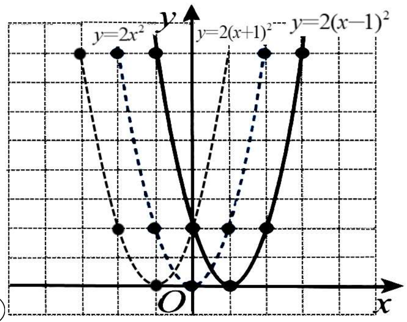
➔ 當 $x=-\frac{1}{4}$時，二次函數有極大值，為開口向下的拋物線。



①



②



③

B、 $y=a(x-h)^2+k$ 的圖形意義：

(1)圖形的對稱軸為 $x-h=0$ ，即 $x=h$ 為垂直 x 軸的對稱軸。

(2)a＞0 時，圖形為開口向上的拋物線；圖形的頂點為(h, k)，此時為極小值。

(3)a＜0 時，圖形為開口向下的拋物線；圖形的頂點為(h, k)，此時為極大值。

(4)h 和拋物線的左移或右移有關，h＞0，則圖形向右移，h＜0 則圖形向左移。

(5)k 和拋物線的上移或下移有關，k＞0，則圖形向上移，k＜0 則圖形向下移。

例：將 $y=3x^2$ 圖形向右移 2 單位長，則函數變成 $y=3(x-2)^2$ ，
再將圖形向下移 3 單位長，則函數變成 $y=3(x-2)^2-3$ 。

例： $y=4(x-3)^2-2$ 圖形的對稱軸為 x＝3，頂點為(3, －2)，開口向上的拋物線；
將圖形向左移 4 單位長，則函數變成 $y=3(x+1)^2$ ，
再將圖形向上移 5 單位長，則函數變成 $y=3(x-2)^2+2$ 。

範例 1 函數的判別

下列何者是二次函數？何者是一次函數？何者是常數函數？

(1)$y=4x$　(2)$y=-2x^2+3$　(3)$y=6$　(4)$y=0.4x-0.3$

(5)$y=6-2x+3x^2$　(6)$y=-\frac{4}{3}x$　(7)$y=\frac{4}{x^2}-\frac{2}{3x}+1$　(8)$y=\frac{4x-(2x+1)^2+4x^2}{5}$

(9)$y=-(x+3)^2+6$　(10)$y=2-(x+3)(x-2)$　(11)$y=\sqrt{2(x-3)^2+4}$　(12)$y=-\frac{4x^2}{3}+\frac{(2x-3)^2}{3}$

(13)$y=x^2+3x-x^2-2$　(14)$y=2x(x-4)$　(15)$y=\frac{3}{2}(x^2-1)$　(16)$y=\frac{4x(3x-2)}{1-3}$

馬上演練

甲、下列何者是二次函數？何者是一次函數？何者是常數函數？

(1)$y=-2+3x^2$　(2)$y=\sqrt{4x-3x^2}$　(3)$y=\frac{2}{5}x^2-2$　(4)$y=\frac{4}{3x^2}-\frac{2}{3}$

(5)$y=(x+2)(x-3)$　(6)$y=12x+(2x-3)^2-4x^2$　(7)$y=\frac{1}{4}-x(3x-2)$　(8)$y=-3x-0.6+\frac{1}{2}x^2$

(9)$y=\frac{3x^2-9x+6}{5-2}$　(10)$y=\frac{5}{3}x^2-\frac{3}{2}+\frac{2}{x}$　(11)$y=\frac{3^2}{4}-\frac{6}{5}x$　(12)$y=\frac{16x-2^2}{5}$

範例 2 函數的求值

1.已知二次函數 $y=f(x)=-x^2+bx+c$。若 $f(1)=0$，$f(2)=4$，則：

(1)b＝＿＿＿＿＿，c＝＿＿＿＿＿。

(2)f(－3)＝＿＿＿＿＿。

2.設 $y=f(x)=ax^2+5$，已知 $f(-1)=3$，則：

(1) $f(2)=$__________。

(2) $f(3)-f(-3)=$__________。

3.二次函數 $y=ax^2$ 的圖形通過點(－1, 2)、(b, 8)，則：

(1)頂點坐標為__________。

(2)a＝________，b＝__________。

4.已知 $f(x)=ax^2+bx+3$；若 $f(2)=11$，$f(-1)=8$，則：

a＝________；b＝________。

5.已知函數 $f(x)=7-8x$，則：

$f(2)+f(4)+f(6)+\ldots\ldots+f(98)+f(100)=$__________。

6.設函數 $y=f(x)$ 定義：$y=f(x)=\begin{cases}3x-1\text{，若}x>3\\ x^2-2\text{，若}-2\leq x\leq 3\\ 2x+3\text{，若}x<-2\end{cases}$，則：

f(5)＝__________，f(－1)＝__________，f(－4)＝__________。

7.已知 $f(x)=3x+5$，且 $g(x+3)=f(x-1)$；則 g(2)＝__________。

8.設 $f(\frac{2}{x+1})=2x^2+x-1$，則 $f(\frac{1}{2})=$__________。

馬上演練

1.已知(1, －2)和(－2, 1)在 $y=ax^2+b$ 的圖形上，則：
a＝_________，b＝_________。

2.已知函數 $f(x)=(x+4)(x-3)$，$g(x)=4x^2-3$，則：$f(4)+g(-3)=$_________。

3.已知函數 ，則：
f(10)＝_________；f(－15)＝_________。

4.已知函數 $f(x)=4x^2+2x$，則：
f(2)＝________；f(10)＝________；f(－7)＝__________。

5.設 $f(x)=2x^3-3x^2+4$，則：
$f(-1)=$________；$f(f(-1))=$________。

6.設 $f(x)=3x^2+ax+b$，f(2)＝8，f(－2)＝0，則：f(－3)＝________。

7.設 $f(x-1)=x^2-3x+2$，則 f(2)＝________。

8.已知函數 $f(x)=ax^2-2x+5$，若 f(－3)＝2，則：＝________。

9.設 $f(x)=5x^2-6x+7$，且 $g(x-1)=f(3x-5)$，則 $g(2)=$________。

範例 3 二次函數圖形的描繪

請描繪下列各小題二次函數的圖形：

(1) $y=-3x^2$

(2) $y=\frac{1}{2}x^2$

(3) $y=-3x^2+2$

(4) $y=\frac{1}{2}x^2+1$

(5) $y=-3(x-2)^2$

(6) $y=\frac{1}{2}(x+2)^2$

(7) $y=-3(x-2)^2+2$

(8) $y=\frac{1}{2}(x+2)^2+1$

馬上演練

請描繪下列各小題二次函數的圖形：

(1)$y=2x^2$

(2)$y=-\frac{1}{3}x^2$

(3)$y=2x^2-2$

(4)$y=-\frac{1}{3}x^2+2$

(5)$y=2(x+1)^2$

(6)$y=-\frac{1}{3}(x-1)^2$

(7)$y=2(x+1)^2-2$

(8)$y=-\frac{1}{3}(x-1)^2+2$

範例 4 **二次函數的平移**

1. 一個二次函數圖形經過點(3, 1)且向上平移後，可與 $y=\frac{1}{3}x^2$ 的圖形重合，則：
   此二次函數的方程式為 y＝__________。

2.二次函數 $y=-3(x-2)^2-1$，則：
   (1)頂點坐標為__________。
   (2)開口向________。
   (3)對稱軸方程式為____________。
   (4)與 y 軸交點為___________。

3.二次函數 $y=-2x^2+1$ 向上平移 3 單位可得 $y=ax^2+k$，向下平移 2 單位可得 $y=bx^2+t$，則：
   $a+k+b+t=$__________。

4.若某二次函數之頂點為原點，對稱軸為 y 軸，且通過(−1, −4)，則：
   此二次函數為 y＝__________。

5.一拋物線頂點為(0, −1)，圖形通過 A(−2, 3)，則：
   將此拋物線向下平移 4 單位後的頂點為__________，A 點為____________。

6.將二次函數 $y=4x^2$ 的圖形向右移動 5 個單位長，則：
   所得的新函數為 y＝_____________。

7.將二次函數 $y=-(x-3)^2$ 先向左平移 2 單位，再向下平移 3 單位後，則：
   新的二次函數為 y＝____________。

8.將二次函數 $y=ax^2+bx+c$ 的圖形向右平移 2 單位，再向下平移 3 單位，可得新函數關係為 $y=2x^2-1$，則：$a+b+c=$____________。

馬上演練

1.已知二次函數 $y=a(x-h)^2+k$ 圖形的最高點為(－4, 5)，且 $|a|=1$，則：
a＝________，h＝________，k＝________。

2.將二次函數 $y=ax^2+c$ 的圖形向上平移 5 單位長，可得新圖形的二次函數 $y=3x^2-2$；則：
原二次函數為 y＝____________。

3.二次函數 $y=(x+2)^2-3$，則：
(1)頂點坐標為__________。
(2)對稱軸方程式為___________。
(3)圖形向右移 2，再向下移 3 後，可得新二次函數為 y＝_________。

4.若二次函數 $y=-4x^2$ 的圖形向左平移 5 個單位後，可得 $y=a(x-h)^2$ 的圖形，則：
$a+h=$_______。

5.若二次函數 $y=2x^2$ 的圖形向下平移後，可得 $y=ax^2+k$，且通過(－3、7)，則：
(a, k)＝_________。

6.將函數 $y=-(x+2)^2-1$ 的圖形向右平移 1 個單位，再向下平移 2 個單位，則：
新圖形的函數為 y＝___________。

7.將二次函數 $y=-2(x+1)^2+3$ 的圖形向下平移 2 個單位長，再向右平移 3 個單位長後，所得到的新函數為 y＝________。

8.直角坐標平面上，二次函數 $y=-\frac{1}{3}x^2-1$ 的圖形向下平移 5 個單位長，再向左平移 2 個單位長後，可得新函數為 y＝___________。

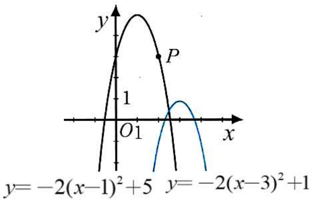
範例 5 二次函數圖形的應用

1.二次函數 $y=ax^2+k$ 的圖形最低點坐標為(0, －2)，且交 x 軸於 A、B 兩點，已知 $\overline{AB}=8$，則：
a＝__________，k＝__________。

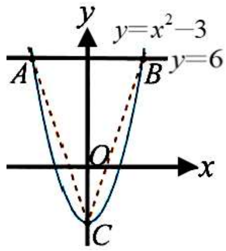
2.若二次函數 $y=9(x+a)^2-b$ 圖形的頂點坐標為(－1, 5)，則：a－b＝________。

3.若二次函數 $y=ax^2+b$ 的圖形可由 $y=2x^2-1$ 的圖形上下移動而得，且其圖形通過點(－2, 5)，
則：a＋b＝_________。

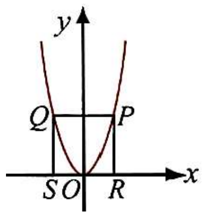
4.如右圖，坐標平面上有一透明片，透明片上有一拋物線 $y=-2(x-1)^2+5$ 及其上之一點(2, 3)。若此透明片向右、向下移動後，與二次函數 $y=-2(x-3)^2+1$ 的圖形完全疊合，則：
P 點移動後的坐標為________。



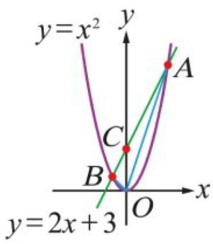
5.已知二次函數 $y=x^2-3$ 圖形的頂點為 C，若此二次函數的圖形與直線 $y=6$ 相交於 A、B 兩點，如右圖，則：
(1)A 點坐標為__________，B 點坐標為__________。
(2)△ABC 的面積＝__________。



6.如右圖，二次函數 $y=3x^2$ 的圖形上有 P、Q 兩點，且 $\overline{PQ}\perp$ y 軸，分別過 P、Q 作 x 軸的垂線，垂足為 R、S。若四邊形 PQSR 為正方形，則：
P 點的坐標為__________。



7.如右圖，在坐標平面上，二次函數 $y=x^2$ 與一次函數 $y=2x+3$ 的圖形交於 A、B 兩點。若 A、B、C 三點共線，且 C 點在 y 軸上，則：
(1)A 點坐標為_________。
(2)B 點坐標為_________。
(3)△AOC 面積：△BOC 面積＝_________。



馬上演練

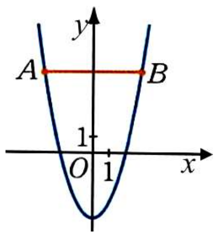
1.若點$(-3,\ -81)$與點$(2, q)$均在二次函數$y=ax^2$的圖形上，則：
a＝________，q＝________。

2.設二次函數的圖形通過$(1, 1)$為$(2, 8)$、$(0, m)$三點，若將此圖形平移後，會與$y=-3x^2$的圖形完全疊合，則 m＝________。

3.已知 a、b、c 為常數，且二次函數$y=a(x+b)^2-c$圖形的頂點坐標是$(2, 3)$。若將此拋物線平移後，會與$y=2x^2$的圖形完全疊合，則：a＋b＋c＝________。

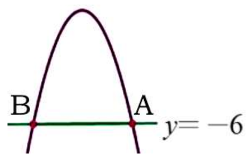
4.設 a 為常數，二次函數$y=ax^2+6x-a^2$圖形開口向下，且圖形經過$(1, 0)$，則：
a＝________。

5.二次函數$y=x^2-4$圖形上有 A、B 兩點。若$\overline{AB}$與 y 軸垂直，且$\overline{AB}=6$，則：
A 點坐標為________，B 點坐標為________。

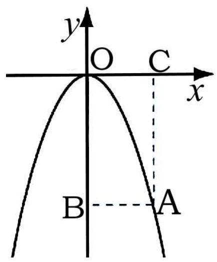


6.如右圖，已知二次函數$y=-\dfrac{3}{4}x^2$的圖形與$y=-6$的圖形交於 A、B 兩點，則：

(1)A 點坐標為________，B 點坐標為________。
(2)AB 長＝________。



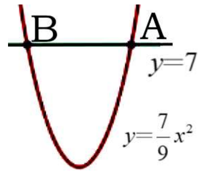
7.如右圖，A 是拋物線$y=-x^2$上的一點。若 ABOC 為矩形，且其面積為 16 平方單位，則：
(1)此矩形的周長＝________。
(2)A 點坐標為________。



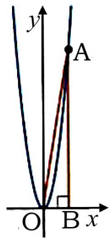
範例 6 二次函數的特性

1.如右圖，已知二次函數 $y=\frac{7}{9}x^2$ 的圖形與 $y=7$ 的圖形交於 A、B 兩點，則：

$\overline{AB}=$__________。



2.如右圖，A 是二次函數 $y=3x^2$ 圖形上的一點。若△AOB 為直角三角形，且其面積為 12 平方單位，則：A 點坐標為__________。

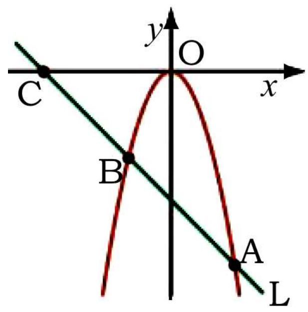


3.已知坐標平面上有一直線 M，其方程式為 $y=3$，且 M 與二次函數 $y=2(x-2)^2+a$ 的圖形相交於 A、B 兩點；與二次函數 $y=-(x-2)^2+b$ 的圖形相交於 C、D 兩點，其中 a、b 為整數。若 $\overline{AB}=6$，$\overline{CD}=4$，則：a＋b＝__________。

4.如右圖，直線 L 與二次函數 $y=ax^2$ 的圖形交於 A、B 兩點，且 L 交 x 軸於 C 點，若 A、C 兩點的坐標分別為(6, －18)與(－12, 0)，則：

(1)a＝__________。

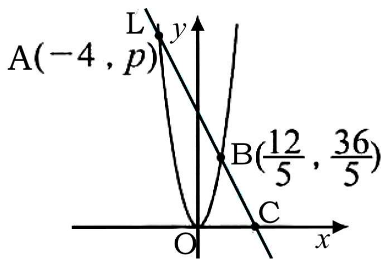
(2)B 點的坐標為__________。



5.如右圖，直線 L 與 x 軸交於 C 點，與拋物線 $y=ax^2$ 交於 A、B 兩點，則：

(1)a＝__________，p＝__________。

(2)△AOC 面積為__________平方單位。



6.已知二次函數 $y=a(x-4)^2+3$，且(5, －2)為其圖形上的一點，若以 y 軸為其對稱軸畫出其線對稱圖形，可得一新的二次因數圖形，則：

(1)此新圖形的二次函數為 y＝__________。

(2)若點(－3, p)為此新圖形上的一點，則：p＝__________。