第一章 數列與等差級數

重點內容 1-1 數列

(一)數列：

A、數列與級數：

(1)將一串的數字由左至右排成一列，就稱為**數列**。

(2)一串數字排成一列，即可稱為數列，數列**不一定**有規律性。

例：1. 阿拉伯數字 1, 2, 3, 4, 5 是一串數列。

2. 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21 是一串數列。

3. －3, 2, 6, －10, 1, 5,17 是一串數列。

(3)一般將數列表示成 $a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots, a_n$，其中 a_1 為第 1 項，也稱為**首項**，a_2 為第 2 項，a_3 為第 3 項，依此類推，而最後一項 a_n，也稱為**末項**。

例：1. 數列－3, 2, 6, －10, 1, 5,17 共有 7 項，其中首項 $a_1=-3$，$a_2=2$，$a_3=6$，$a_4=-10$，$a_5=1$，$a_6=5$，末項 $a_7=17$。

2. 第 110000092 期的大樂透開獎號碼依次為 37, 02, 26, 21, 25, 12，這是一串數列，其中首項 $a_1=37$，$a_2=02$，$a_3=26$，$a_4=21$，$a_5=25$，末項 $a_6=12$。

B、常見有規律的數列：

(1)有些數列只是一串毫無關聯性的數字排成一列，例如：大樂透的開獎數字。

(2)若數列中每一項數字的變化有一定的規律時，即稱此數列具有規律性。

例：1. 計程車車資的跳表為 70, 75, 80, 85, 90, 95, 100, ……此為有規律性的數字。

2. 正奇數數列的規律：1, 3, 5, ……，其中第 n 項 $a_n=2n-1$ 稱為一般項。

3. 正偶數數列的規律：2, 4, 6, ……，其中第 n 項 $a_n=2n$ 稱為一般項。

4. 循環小數的規律：將 $\frac{5}{11}$ 化為小數為 0.454545……，記為 $0.\overline{45}$，讀做 0.45 循環。

將 $\frac{3}{7}$ 化為小數為 0.428571428……，記為 $0.\overline{428571}$，讀做 0.428571 循環。

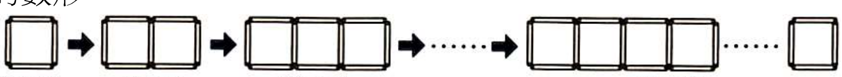
5. 平方數列的規律：1, 4, 9, 16, 25,…..，其中第 n 項 $a_n=n^2$ 稱為一般項。

6. 冪次數列的規律：1, 2, 4, 8, 16, 25, 36, ……，其中第 n 項 $a_n=2^{n-1}$ 稱為一般項。

7. **調和數列**：1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$,…….,其中第 n 項 $a_n=\frac{1}{n}$ 稱為一般項。

8. **費氏數列**：1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21,……，其中第 n 項 $a_n=a_{n-2}+a_{n-1}$ 稱為一般項。

(3)規律的數形：



甲、第1項 ______ 第2項 ______ 第3項 ______ 第n項 ______

乙、第1項 ______ 第2項 ______ 第3項 ______ 第n項 ______

範例 1 尋找數列的規律性(一)

觀察下列各小題中數列的規律性，在空格中填入適當的數：

(1)20、16、12、______、______、0、-4、______、______、______。

(2)10、13、16、______、22、______、______、31。

(3)2、3、5、7、______、______、17、______、______。

(4)1、-3、9、-27、______、______、729。

(5)1、-2、-3、4、-5、-6、______、-8、______、10、______、______。

(6)2、4、8、______、______、______、128、______。

(7)1、2、5、10、17、______、______、______、65、______。

(8)6、0、0、6、18、 ______、______、______。

馬上演練

觀察下列各小題中數列的規律性，在空格中填入適當的數：

(1)10、9、7、4、______、______、______。

(2)1、9、25、49、______、121、______、______。

(3)0、3、8、15、______、______、______。

(4)3、3、6、9、______、______、______。

(5)343、216、______、______、______、______、1。

(6)$\frac{1}{3}$、$\frac{2}{5}$、$\frac{3}{7}$、______、______、______、______。

(7)1、1、2、3、5、______、______、______、______。

(8)-45、-38、-31、______、______、______、______。

範例 2 **尋找數列的規律性(二)**

1.觀察一數列 1、2、4、7、11、 a 、 b 的規律，則 $a+b=$__________。

2.觀察一數列 $\frac{1}{2}$ 、 $\frac{1}{6}$ 、 $\frac{1}{12}$ 、 $\frac{1}{20}$ 、……，則此數列的第 10 項為__________。

3.已知 $\frac{4}{7}$ ＝0.5714285714……，則小數點以下第 100 位的數字為__________。

4.有一數列為－1、2、－4、8、－16……，則此數列的第 9 項為__________。

5.有一數列 $\frac{1}{1}$ 、 $\frac{1}{2}$ 、 $\frac{2}{1}$ 、 $\frac{1}{3}$ 、 $\frac{3}{1}$ 、 $\frac{2}{3}$ 、 $\frac{3}{2}$ 、 $\frac{1}{4}$ 、 $\frac{4}{1}$ 、……、 $\frac{15}{16}$ 、 $\frac{16}{15}$ ，其中分母為 13 的分數，共有________項。

6.費氏數列是以兩個 1 開始，接下來各項均為前兩項的和，如右所示：1, 1, 2, 3, 5, 8,……。則在費氏數列各項的個位數字中，最後出現的數字為__________。

7.有一數列為－4、0、6、14、……，則此數列的第 12 項為__________。

8.有一數列的第 n 項為 $a_n=(n+2)(n-1)$ ，且 $a_k=28$ ，則：
$k=$_________； $a_{10}-a_9=$________。

馬上演練

1.已知 $\frac{5}{13}$ ＝0.3846153846……，則小數點以下第 50 位的數字為__________

2.有一數列為 1、4、9、16、...，則第 20 項為_________。

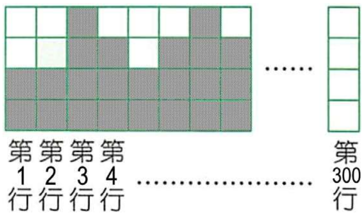
3.有一數列為 $\frac{1}{20}$ 、 $\frac{3}{24}$ 、 $\frac{5}{28}$ 、……，則第 10 項為_________。

4.有一數列為 13、9、5、1、……，則第 15 項為_________。

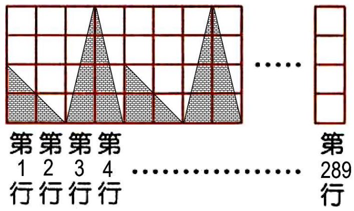
5.有一數列的第 n 項為 $a_n=(n+1)(n-2)$ ，且 $a_k=40$ ，則：
$k=$_________； $a_{15}-a_{12}=$________。

範例 3　尋找圖形的規律性

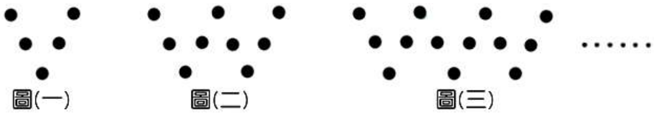
1.如右圖，璇璇將方格有規律的著色，作為學校圍牆布置的磁磚，則依圖形的規律，在第 300 行中其圖樣應為何？



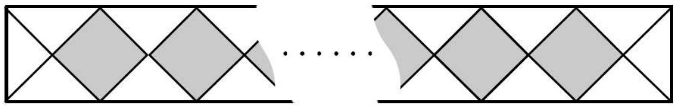
2.如右圖，芯芯將方格有規律的著色，作為學校圍牆布置的磁磚，依圖形的規律，請在右圖第 289 行中畫出其圖樣。



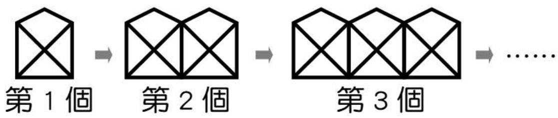
3.右圖是由圓點「˙」所排成的規律圖形，若圖(n)中，圓點的總數為 a_n，則 $a_{50}=$________。



4.公園內有一矩形步道，其地面使用相同的灰色正方形地磚與相同的白色等腰直角三角形地磚排列而成。下圖表示此步道的地磚排列方式，其中正方形地磚為連續排列且總共有 60 個。則：步道上總共使用________個三角形地磚。

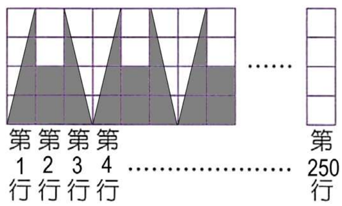


5.如右圖，謙謙用火柴棒依次向右排出相連的柵欄圖形，如果謙謙預計排出 45 個連續的柵欄圖形，則：他需要__________根火柴棒。

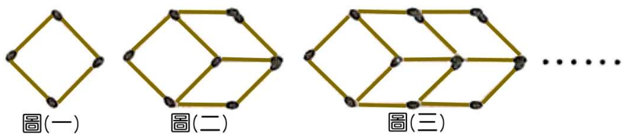


馬上演練

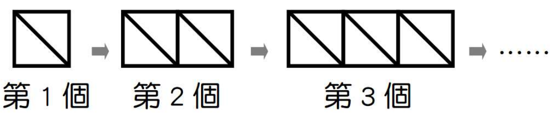
1.如右圖，葳葳將方格有規律的著色，作為學校圍牆布置的磁磚，依圖形的規律，則依圖形的規律，在第 250 行中畫出其圖樣。



2.右圖是由火柴棒所排成的規律圖形，若圖(n)中，火柴棒的總數為 a_n，則 $a_k=74$，則：$k=$__________，$a_{51}=$__________。



3.如右圖，用牙籤依次向右排出相連的方形，如果儒儒想要排出 20 個連續的方形，則：他需要__________根牙籤。



範例 4 **數列的第 n 項**

1.已知有一數列的第 n 項 $a_n=\sqrt{2n+1}$ ，則 11 為該數列的第________項。

2.已知有一數列的第 n 項 $a_n=7n+4$ ，且 $a_{n-1}+a_n$ 之值為 799，則：

(1)n＝__________。

(2) $a_5+a_{10}+a_{15}=$ __________。

3.根據下列數列的一般項，寫出該數列的前 5 項：

(1) $a_n=(2n-1)^2+1$ ，則：

a_1＝______，a_2＝______，a_3＝______，a_4＝______，a_5＝______。

(2) $b_n=n(2n+1)$ ，則：

b_1＝______，b_2＝______，b_3＝______，b_4＝______，b_5＝______。

(3) $c_n=\dfrac{n}{3n-2}$ ，則：

c_1＝______，c_2＝______，c_3＝______，c_4＝______，c_5＝______。

馬上演練

1.已知有一數列的第 n 項 $a_n=5-6n$ ，則－205 為該數列的第________項。

2.已知有一數列的第 n 項 $a_n=3n+2$ ，且 $a_{n-1}+a_n$ 之值為 295，則：

(1)n＝__________。

(2) $a_2+a_4+a_6=$ __________

3.根據下列數列的一般項，寫出該數列的前 3 項：

(1) $a_n=n\sqrt{2n+1}$ ，則：

a_1＝______，a_2＝______，a_3＝______

(2)有一數列為 $-\dfrac{20}{99}$、$\dfrac{17}{88}$、$-\dfrac{14}{77}$、……，則：

a_6＝______，a_7＝______，a_8＝______。

(二)循環小數化作分數：

A、純循環小數：

(1) $0.\overline{3}$：

令 $x=0.\overline{3}=0.3333\ldots\ldots$① 則 $10x=3.3333\ldots\ldots$②	②－① $10x-x=3$ ➔ $9x=3$ ➔ $x=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$

(2) $0.\overline{42}$：

令 $x=0.\overline{2}=0.424242\ldots\ldots$① 則 $100x=42.424242\ldots\ldots$②	②－① $100x-x=42$ ➔ $99x=42$ ➔ $x=\frac{42}{99}$

B、混循環小數：

(1) $0.4\overline{3}$：

令 $x=0.4\overline{3}=0.433333\ldots\ldots$① 則 $10x=4.33333\ldots\ldots$② $100x=43.3333\ldots\ldots$③	③－② $100x-10x=43-4=39$ ➔ $90x=39$ ➔ $x=\frac{39}{90}$

(2) $0.34\overline{525}$：

令 $x=0.34\overline{525}=0.34525525\ldots\ldots$① 則 $100x=34.525525\ldots\ldots$② $100000x=34525.525525\ldots\ldots$③	③－② $100000x-100x=34525-34=34491$ ➔ $99900x=34491$ ➔ $x=\frac{34491}{99900}$

範例 5　循環小數和分數的互換

1.將下列分數化為循環小數：

(1) $\frac{2}{3}=$__________；$\frac{7}{9}=$__________。

(2) $\frac{3}{11}=$__________；$\frac{12}{33}=$__________；$\frac{17}{99}=$__________。

(3) $\frac{9}{22}=$__________；$\frac{13}{55}=$__________；$\frac{23}{88}=$__________。

(4) $\frac{4}{7}=$__________；$\frac{7}{13}=$__________；$\frac{4}{21}=$__________。

2.將下列循環小數化為分數：

(1) $0.\overline{23}=$__________；$0.\overline{57}=$__________；$0.\overline{63}=$__________。

(2) $0.\overline{123}=$__________；$0.\overline{5127}=$__________；$0.\overline{65143}=$__________。

(3) $0.0\overline{12}=$__________；$0.3\overline{17}=$__________；$0.42\overline{523}=$__________。

馬上演練

1.將下列分數化為循環小數：

(1) $\frac{4}{9}=$ ＿＿＿＿＿＿；$\frac{37}{99}=$ ＿＿＿＿＿＿；$\frac{137}{999}=$ ＿＿＿＿＿＿。

2.將下列循環小數化為分數：

(1) $0.\overline{2}=$ ＿＿＿＿＿＿；$0.\overline{23}=$ ＿＿＿＿＿＿；$0.\overline{123}=$ ＿＿＿＿＿＿。

(2) $0.1\overline{2}=$ ＿＿＿＿＿＿；$0.1\overline{23}=$ ＿＿＿＿＿＿；$0.12\overline{3}=$ ＿＿＿＿＿＿。

(3) $0.12\overline{34}=$ ＿＿＿＿＿＿；$0.12\overline{345}=$ ＿＿＿＿＿＿；$0.123\overline{45}=$ ＿＿＿＿＿＿。

範例 6 規律性的判斷

1.雲鼎國中今年一年級的新生有 345 人，依據入學時智力測驗成績排序編號，今欲按照教育部規定的 S 形編排方式，將新生編成 11 班，S 形編班的方式如右表，則：

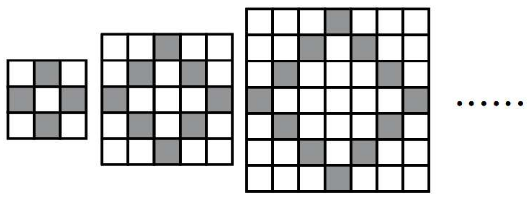
班別	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
編號	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
	22	21	20	19	18	17	16	15	14	13	12
	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33
	44	43	42	41	40	39	38	37	36	35	34

(1)編號為 150 的同學應編在＿＿＿＿班。

(2)編號為 200 的同學應編在＿＿＿＿班。

(3)一年級有＿＿＿個班級人數為 31 人。

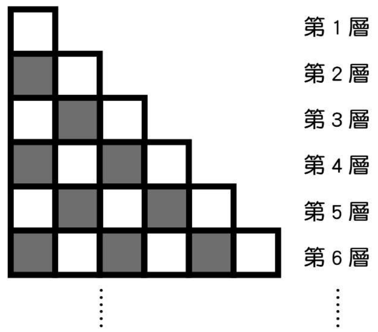
2.右圖是嘉嘉在每邊 3 格、5 格、7 格、……的方格內所設計的圖案，依此規律，在每邊有 19 格的方格內，則：



(1)灰色的方格共有＿＿＿＿＿個。

(2)白色的方格共有＿＿＿＿＿個。

3.如圖，用一樣大的灰、白方塊依序排出層層相連的階梯，則：



(1)第 49 層需要＿＿＿＿＿個白方塊。

(2)第 100 層需要＿＿＿＿＿個白方塊。

馬上演練

1.右圖是錢多多銀行的保險箱排列的方式，一共有 900 個保險箱，則：

(1)晶晶把她所買的黃金放置於 111 號保險箱，則晶晶的保險箱是在第______行第______列。

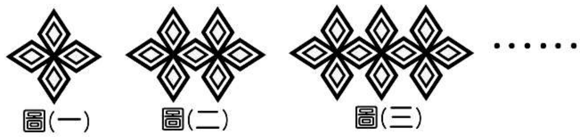
(2)金爺爺把他的傳家寶放在 666 號保險箱，則金爺爺的保險箱是在第______行第______列。

	第一行	第二行	第三行	第四行	第五行	第六行	第七行	第八行	第九行
第一列	1	2	3	4	5	6	7	8	9
第二列	18	17	16	15	14	13	12	11	10
第三列	19	20	21	22	23	24	25	26	27
第四列	36	35	34	33	32	31	30	29	28
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

2.右圖是一組有規律的圖案，圖(一) 是由 4 個◈組成的，圖(二) 是由 7 個◈組成的，則：

(1)圖(十) 是由______個◈組成的。

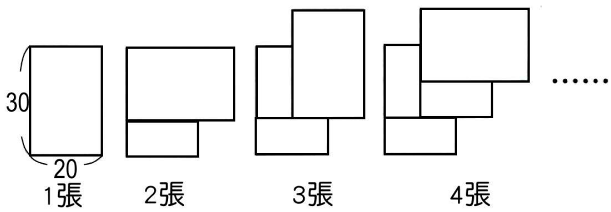
(2)依此排列方式，第 n 個圖形是由______個◈組成的。



3.將一長 30 公分、寬 20 公分的長方形紙張依下列圖示方式疊在桌面上，則：

(1)疊完 10 張後，桌面上所覆蓋的面積是_______平方公分。

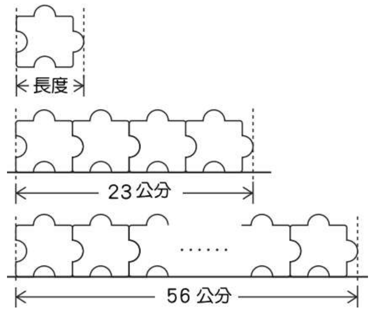
(2)疊完 25 張後，桌面上所覆蓋的面積是_______平方公分。



4.已知有若干片相同的拼圖，其形狀如圖(一)，且拼圖依同方向排列時可緊密拼成一列，此時底部可與直線貼齊。當 4 片拼圖緊密排成一列時長度為 23 公分，如圖(二)。當 10 片拼圖緊密排成一列時長度為 56 公分，如圖(三)。則：

(1)圖(一)中的拼圖長度為_________公分。

(2)若連續緊密排列成 30 片，則長度應為__________公分。



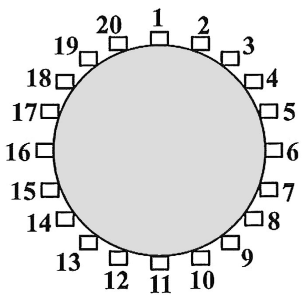
5.如右圖，一圓桌周圍有 20 個箱子，依順時針方向編號 1～20。芊芊在 1 號箱子中丟入一顆紅球後，沿著圓桌依順時針方向行走，每經過一個箱子就依下列規則丟入一顆球：

1. 若前一個箱子丟紅球，經過的箱子就丟綠球。
2. 若前一個箱子丟綠球，經過的箱子就丟白球。
3. 若前一個箱子丟白球，經過的箱子就丟紅球。

已知她沿著圓桌走了 50 圈，則：

(1)1 號箱內有_______顆紅球。

(2)11 號箱內有_______顆紅球。



(三)等差數列：

A、等差數列：

(1)定義：

甲、在一個數列中，若任意相鄰兩項中的後項減前項之差都相等，則稱此數列為等差數列，而這個差稱為**公差**，通常以 **d** 表示。

乙、一數列中，若 $a_2-a_1=a_3-a_2=a_4-a_3=......=a_n-a_{n-1}=d$，即稱此數列為**等差數列**。

(2)公差：

甲、**公差＝後項－前項**＝a_n-a_{n-1}。

乙、將等差數列中的每一項都**加(或減)**相同的數，則仍然是等差數列，並且其**公差不變**。

丙、將等差數列中的每一項都**乘**相同的數 k，則仍然是等差數列，此時公差為**原公差的 k 倍**。

(3)等差數列的第 n 項：

甲、若一等差數列的首項為 a_1，公差為 d，第 n 項為 a_n，則：

$a_n=a_1+(n-1)d$

公式推導：

乙、若一等差數列的其中第 k 項為 a_k，公差為 d，第 n 項為 a_n，則：

$a_n=a_k+(n-k)d$

【證明】：$a_k=a_1+(k-1)d$ ……①

$a_n=a_1+(n-1)d$ ……②

②－① ➔ $a_n-a_k=(n-k)d$

丙、將一個等差數列的任意項 a_k **加上公差** d，即可得到其相鄰的**後項**，即 $a_k+d=a_{k+1}$。

丁、將一個等差數列的任意項 a_k **減去公差** d，即可得到其相鄰的**前項**，即 $a_k-d=a_{k-1}$。

戊、在 a 和 b 兩數之間插入 n 個數，使這些數成為等差數列，則因為 a 為首項，b 為第 $(n+2)$ 項，因此：

$b=a+(n+2-1)d$ ➔ $d=\dfrac{b-a}{n+1}$

(4)等差中項：

甲、已知 a、b、c 三個數成等差數列，則 $b-a=c-b=d$，

此時：$2b=a+c$ ➔ $b=\dfrac{a+c}{2}$，我們稱中間項 b 為等差中項。

乙、設 a_1、a_2、……、a_k 為一等差數列，ℓ、m、n 為正整數，若 $1\leqq\ell<m<n\leqq k$，並且 ℓ、m、n 成等差數列時，則：

a_ℓ、a_m、a_n 也會成等差數列，此時 a_m 為 a_ℓ、a_n 的等差中項。

例：設 a_1、a_2、a_3、a_4、a_5、a_6、a_7 為一等差數列，則 a_4 必為 a_3 與 a_5 的等差中項；同時也是 a_2 與 a_6 的等差中項，也是 a_1，與 a_7 的等差中項。

同樣的，a_3 為 a_2 與 a_4 的等差中項，也是 a_1 與 a_5 的等差中項。

a_5 為 a_4 與 a_6 的等差中項，也是 a_3 與 a_7 的等差中項。

(5)等差數列的應用：

甲、若直角三角形的三邊長成等差數列，則此三邊長的比例必為 3：4：5。因此可假設此直角三角形的三邊長為 3d、4d、5d。

乙、若三個數成等差數列時，可假設此三數為 $a-d$、a、$a+d$。(此時公差為 d)

丙、若四個數成等差數列時，可假設此四數為 $a-3d$、$a-d$、$a+d$、$a+3d$。(此時公差為 2d)

丁、若五個數成等差數列時，可假設此五數為 $a-2d$、$a-d$、a、$a+d$、$a+2d$。(此時公差為 d)

範例 7 **判斷是否為等差數列**

1.判斷下列各小題是否為等差數列？若是，請寫出其公差：

(1)26、23、20、17、14、11

(2)-1、2、-3、4、-5、6、-7

(3)1、4、9、16、25、36、49

(4)$\sqrt{1}$、$\sqrt{2}$、$\sqrt{3}$、$\sqrt{4}$、$\sqrt{5}$、$\sqrt{6}$、$\sqrt{7}$

(5)$-\sqrt{1}$、$-\sqrt{4}$、$-\sqrt{9}$、$-\sqrt{16}$、$-\sqrt{25}$、$-\sqrt{36}$、$-\sqrt{49}$

(6)2、3、5、8、13、21、34、55

(7)$\frac{11}{2}-\sqrt{7}$、$\frac{7}{2}-\sqrt{7}$、$\frac{3}{2}-\sqrt{7}$、$-\frac{1}{2}-\sqrt{7}$、$-\frac{5}{2}-\sqrt{7}$、$-\frac{9}{2}-\sqrt{7}$、$-\frac{13}{2}-\sqrt{7}$

(8)$\frac{5}{3}$、$\frac{9}{3}$、$\frac{13}{3}$、$\frac{17}{3}$、$\frac{21}{3}$、$\frac{25}{3}$

馬上演練

1.判斷下列各小題是否為等差數列？若是，請寫出其公差：

(1)$\frac{3}{5}$、$\frac{3}{9}$、$\frac{3}{13}$、$\frac{3}{17}$、$\frac{3}{21}$、$\frac{3}{25}$

(2)$\sqrt{3}-1$、$\sqrt{3}$、$\sqrt{3}+1$、$\sqrt{3}+2$、$\sqrt{3}+3$、$\sqrt{3}+4$、$\sqrt{3}+5$、$\sqrt{3}+6$

(3)-71、-66、-61、-56、-51、-46、-41

(4)-4、-4、-4、-4、-4、-4、-4

(5)$\frac{1}{2}$、$\frac{1}{3}$、$\frac{1}{4}$、$\frac{1}{5}$、$\frac{1}{6}$、$\frac{1}{7}$

範例 8 完成等差數列各項

1.在空格中填入適當的數，使其成為等差數列：

(1)$\sqrt{2}$、$\sqrt{8}$、______、______、______、______。

(2)$3a+2b$、$2a$、______、______、______、______。

(3)$\frac{3}{2}$、$\frac{4}{3}$、______、______、______、______。

(4)______、-3、1、______、______、______。

(5)______、______、-59、______、-47、______。

(6)$-a+3b$、______、$5a-b$、______、______、______。

(7)______、______、8、______、______、20、______。

(8)-30、______、______、______、______、______、12。

馬上演練

1.在空格中填入適當的數，使其成為等差數列：

(1)$-\sqrt{12}$、$\sqrt{3}$、______、______、______、______。

(2)$-\frac{2}{3}$、$-\frac{1}{2}$、______、______、______、______。

(3)$a+3b$、$2b$、______、______、______、______。

(4)______、5、-1、______、______、______。

(5)______、5、______、-1、______、______。

(6)______、5、______、______、-1、______、______。

(7)1、______、______、______、______、______、-23。

(8)$\sqrt{2}-3$、______、$5\sqrt{2}+5$、______、______、______。

範例 9 等差數列的基本計算

1.若一等差數列的首項為－110，公差為 7，則：

(1)第 6 項為________。

(2)第________項開始為正值。

2.設有一等差數列＜a_n＞的一般項為－9n＋6，則：

(1)此等差數列的公差為__________。

(2)此數列的第 6 項為__________。

3.若一等差數列的第 5 項為－27，第 9 項為－43，則：

(1)首項為_________。

(2)公差為_________。

(3)第 15 項為_________。

4.從 50 到 500 中，能被 3 除餘 2 的整數形成一數列，則：

(1)此數列共有_________項。

(2)此數列最大的數為_________，最小的數為_________。

5.有一等差數列的首項為 7，末項為－5，公差為$-\dfrac{2}{3}$，則：

(1)此數列共有_________項。

(2)此數列的第 7 項為_________；第 16 項為_________。

(3)第_________項開始為負值。

6.有一等差數列的第 10 項為 20，公差為 3，則：

(1)此等差數列的首項為_________。

(2)第_________項起大於 100。

馬上演練

1.若一等差數列的首項為 145，公差為－6，則：
(1)第 16 項為________。
(2)第________項開始為負值。

2.設有一等差數列＜ a_n ＞的一般項為 $4n-5$ ，則：
(1)此等差數列的公差為________。
(2) $a_1+a_{10}=$________。

3.若一等差數列的第 2 項為－3，第 5 項為 15，則：
(1)首項為________。
(2)公差為________。
(3)第 15 項為________。

4.從 0 到 200 中，能被 7 除餘 3 的整數形成一數列，則：
(1)此數列共有________項。
(2)若最大的數為首項，則 $a_1=$________，末項 $a_n=$________。
(3) $a_{10}+a_{20}=$________。

5.有一等差數列的首項為－30，末項為 45，公差為 $\frac{5}{6}$，則：
(1)此數列共有________項。
(2)第________項開始為正值。
(3)此數列中，小於 0 的最大數為________，大於 0 的最小數為________。

6.若一等差數列的第 7 項為－13，第 15 項為－37，則：
(1)首項為________。
(2)公差為________。
(3)第 33 項為________。

範例10 等差數列的應用(一)

1.已知$\frac{1}{3}$、$\frac{1}{4}$、$\frac{1}{x}$為等差數列，則：

(1) $x=$________。

(2)公差 d=________，a_4=________。

2.若四個數 a、2、b、c 成等差數列，且 a－c＝18，則：

(1)b＝________。

(2)a＋c＝________。

3.已知一直角三角形的三邊長成等差數列，且面積為 96 平方公分，則：

此直角三角形的周長為________公分。

4.有一等差數列＜a_n＞，若 $a_3+a_4=16$，$a_9+a_{10}=40$，則：

(1)a_1＝________，d＝________。

(2)a_{21}＝________。

5.已知兩整數的乘積為 24，且此兩數與其等差中項的和為 21，則：

此兩數為________。

6.若在－28 與 65 之間插入 30 個數，使其成為等差數列，則：

(1)所成等差數列的公差 d＝________。

(2)插入的第 20 個數為________。

(3)插入的第________項起為正值。

7.已知 x、y 的等差中項為 6，且 3x＋2y 與 2x－y 的等差中項為 14，則：

x＝________，y＝________。

馬上演練

1.已知$\frac{1}{4}$、$\frac{1}{a}$、$\frac{1}{6}$為等差數列，則：

(1) $a=$________。

(2)公差 $d=$________， $a_4=$________。

2.若在－44 與 b 之間插入 20 個數，使其成為等差數列，已知插入的第 10 個數為 6，則：

(1)所成等差數列的公差 d＝________，b＝________。

(2)插入的第 5 個數為________。

(3)插入的第________項起為正值。

3.若三角形的三內角度數成等差數列，且最大角為最小角的 5 倍，則：

最大角的度數為________度，最小角的度數為________度。

4.設 a_1、a_2、a_3、a_4 成等差數列，若 $a_1+a_3=21$，$a_2+a_4=47$，則：

(1) $a_2+a_3=$________。

(2)公差 d＝________。

5.有一直角三角形，其三邊長成等差數列，且此三角形的面積為 216 平方公分，則：

此三角形的周長為________公分。

6.已知有四數成等差數列，其和為 12，且中間兩項的積為－27，則：

(1) $a_1=$________，公差 d＝________。

(2) $a_2+a_3=$________。

7.設 $a-2b$、8、$a+3b$ 三數成等差數列，且 a、5、b 三數也成等差數列，則：

$a\times b=$________。

範例11 等差數列的應用(二)

1.萱萱想買一臺價值 15200 元的攝影機，但目前存款只有 2450 元，若她計畫從 9 月 1 日起，每日儲存 200 元，則：
______月______日時萱萱童才有足夠的存款能購買。

2.雲頂影城的設計共有 25 排座位，每一排都比前一排多 2 個座位，若最後一排有 50 個座位，則：
(1)第一排有________個座位。
(2)最中間的一排有________個座位。

3.已知 m、n 均為正整數，且 $m \neq n$，設一等差數列的第 m 項為 2n，第 n 項為 2m，則：
第(m＋n)項之值為________。

4.在一等差數列中，已知第 n^2 項為 m，第 m^2 項為 n，且 m、n 為相異正整數，則：
(1)此數列的公差 d＝__________。
(2)第(m^2＋n^2)項之值為___________。

5.若三數之比為 2 : 5 : 7，當第一數不變、第二數加 5、第三數加 17 後成為等差數列，則：
此新三數之和為________。

6.如右圖，共有 9 個方格，若每一橫列、直行及對角線上的三個數字均成等差數列，則：$a+b=$_________。

-1	b	
		a
5		3

7.有兩個等差數列，一數列的首項是 5，公差是 11，另一數列的首項是 13，公差是 19，則：
此兩數列中，最小的共同項為_________。

8.已知 a、5、b、$3x+1$、c、x^2+5 六數成等差數列，則：
$x=$_________。

馬上演練

1.已知－19 和 59 的等差中項為 $4x+1$，則 x 之值為________。

2.在 12 與 80 之間插入 5 個數 a、b、c、d、e，使得全部 7 個數形成等差數列，則：
$a-b+c-d+e$ 之值為________。

3. x 的一元二次方程式：$ax^2-4x-16=0$ 之兩根為 m、n。若 m、a、n 形成等差數列，則：
$a=$________。

4.有三數成等差數列，且三數和為 27、平方和為 293。若此數列的公差小於 0，則：
此三數分別為____________。

5.已知 a_1、a_2、a_3、a_4、a_5、a_6 為一等差數列，而 b_1、b_2、b_3、b_4、b_5 也是等差數列，若
$a_3+a_5-2b_4=10$，則：$b_3+b_5-a_2-a_6$ 的值為________。

6.將等差數列 1、4、7、10、……的數字由小到大，依次寫在活頁紙上，每一行寫 15 個數，則：
數字 1234 應寫在第__________行上。

7.有一三位正整數，其各位數字成等差數列，且其數字和為 21，若將其個位數字與百位數字交換，所得之數較原數大 396，則：
原數為___________。

8.下列兩個等差數列中，第 10 個相同的數為_________。
等差數列一：2、5、8、11、14、17、20、23、26、29、32、35、……
等差數列二：3、7、11、15、19、23、27、31、35、29、43、……

範例12 等差數列的應用(三)

1.若在 24、－8 兩數之間插入 11 個數，使得這 13 個數成等差數列，則：
插入的第________個數為 0。

2.若玟玟寫出所有滿足 $a_3=2$ 且 $a_{n+1}=2|a_n-3|-4$ 的數列，則：
這些數列首項 a_1 的總和為__________。

3.已知某一數列前四項為 $a_1=1+5\times3$、$a_2=2+5\times5$、$a_3=3+5\times7$、$a_4=4+5\times9$，且此數列的第 n 項為 n 的一次函數。若 $a_k=2018$，則：
k 之值為__________。

4.一等差數列 $a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots, a_n$，已知 $a_1+a_3+a_5=15$，$a_1\times a_3\times a_5=45$，且公差 d 為負數，則：
$a_{44}=$__________。

5.考慮數列 8 , 9 , 7 , 6 , 3 , 9 , 2 , ……。此數列的第一項 b_1 為 8，第二項 b_2 為 9，從第三項以後，每一項為「前兩項數字和的個位數字」，例如第五項 b_5 的前兩項為 b_3、b_4，$b_3+b_4=7+6=13$，13 的個位數為 3，故 $b_5=3$。照此規則。則：
第 2010 項 $b_{2010}=$__________。

6.一次函數 $f(x)=\frac{2}{3}x-12345$，若 f (3) , f (a) , f (b) , f (15) 為等差數列，則：
公差為_________，且 a＋b＝_________。